Géométrie des fonctions quadratiques à deux variables

Stage de recherche

LocalSolver,
24 avenue Hoche, 75008 Paris,
Julien Darlay, Nikolas Stott, Simon Boulmier
jdarlay/nstott/sboulmier@localsolver.com

1 Contexte

LocalSolver est une entreprise de service, de conseil et d'édition dans le domaine de la recherche opérationnelle. Elle développe un solveur programmation mathématique traitant les problèmes d'optimisation sous contraintes :

$$\min_{x \in X} f(x),$$

où $X \subset \mathbb{R}^n$ et $f : X \to \mathbb{R}^m$. Le solveur exploite de nombreux outils numériques et algorithmiques tels que la recherche locale, l'optimisation non linéaire, ou encore la programmation par contrainte. Il est utilisé pour résoudre des problèmes opérationnels dans des domaines variés de l'industrie, tels que les télécommunications, la logistique, les transport, l'énergie ou encore l'aérospatial.

Les expressions quadratiques permettent de modéliser de nombreux systèmes et sont la forme la plus fréquente des contraintes non linéaires rencontrés dans les problèmes d'optimisation traitées par LocalSolver. Dès que ces fonctions sont non convexes ou font intervenir un grand nombre de variables, beaucoup de problèmes algorithmiques et géométriques les concernant deviennent NP-difficiles. Afin d'améliorer les performances du solveur sur les problèmes quadratiques, ce stage propose d'étudier les restrictions de ces fonctions à deux de leurs variables.

2 Aspects géométriques

Étant donnée une fonction quadratique de deux variables réelles :

$$\phi(x, y) = ax^2 + bx + cxy + dy + ey^2,$$

l'objet du stage consiste à exposer un certain nombre de propriétés géométriques de ϕ, touchant des domaines théoriques, algorithmiques et numériques.

Plus précisément, on se donne deux intervalles bornés définissant les domaines des variables : $x \in [\ell_x, u_x]$ et $y \in [\ell_y, u_y]$. L'objectif est d'étudier la fonction ϕ sur le rectangle $\mathcal{C}$ ainsi défini, afin d'obtenir une implémentation de différentes routines de géométrie computationnelle telles que

— le calcul des extrema globaux de ϕ :

$$\min_{(x,y) \in \mathcal{C}} \phi(x, y) \quad \text{et} \quad \max_{(x,y) \in \mathcal{C}} \phi(x, y)$$

— le calcul des extrema des fonctions réduites :

$$f_1(x) = \min_{\ell_y \leq y \leq u_y} \phi(x, y) \quad \text{et} \quad f_2(y) = \max_{\ell_x \leq x \leq u_x} \phi(x, y),$$

— la résolution de systèmes d'équations par intervalles :

$$\min\{\ x \mid \ell \leq \phi(x,y) \leq u,\ \ell_x \leq x \leq u_x,\ \ell_y \leq y \leq u_y\}$$

— la résolution d'équations dynamiques : déterminer

$$\{\ (d_x, d_y) \mid \ell \leq \phi(x+d_x, y+d_y) \leq u,\ \ell_x \leq x+d_x \leq u_x,\ \ell_y \leq y+d_y \leq u_y\}$$

— la caractérisation de l'enveloppe convexe de

$$\{\ \phi(x,y) \mid (x,y) \in \mathcal{C}\}.$$

3 Apects algorithmiques

Une fonction quadratique générale peut s'écrire

$$q(x_1, \cdots, x_n) = q_0 + \sum_i q_i x_i + \sum_i q_{ij} x_i x_j,$$

et définit autant de fonctions à deux variables que de termes non nuls dans les q_{ij}. L'adaptation des structures de données représentant de telles fonctions aux besoins des différentes routines mises en place est un autre axe de travail, qui permettra d'obtenir de bonnes meilleures performances pratiques lors de la résolution incrémentale d'un grand nombre de ces sous-problèmes à deux variables.

L'exploitation des résultats géométriques obtenus au sein de LocalSolver permettra alors d'améliorer de nombreux composants du solveur : meilleures réductions de l'espace de recherche par propagation et inférence de bornes, détection plus efficace des problèmes inconsistants ou encore amélioration de la génération de chaînes d'éjection dans l'hypergraphe des contraintes, qui permettra de fournir de meilleures solutions sur les problèmes présentant des contraintes quadratiques.