Implémentation d'un algorithme de points intérieurs pour des problèmes quadratiques convexes

Stage de recherche

LocalSolver,
24 avenue Hoche, 75008 Paris,
Julien Darlay, Nikolas Stott, Simon Boulmier
jdarlay/nstott/sboulmier@localsolver.com

1 Contexte

LocalSolver est une entreprise de service, de conseil et d'édition dans le domaine de la recherche opérationnelle. Elle développe un solveur programmation mathématique, traitant les problèmes d'optimisation sous contraintes, avec des variables continues, discrètes ou ensemblistes :

$$\min_x f(x) \text{ tels que } g_i(x) = 0\,, \forall i\,.$$

Le solveur exploite de nombreux outils numériques et algorithmiques tels que la recherche locale, l'optimisation non linéaire, ou encore la programmation par contraintes. Il est utilisé pour résoudre des problèmes opérationnels dans des domaines variés de l'industrie, tels que les télécommunications, la logistique, les transport, l'énergie ou encore l'aérospatial.

Lorsque les variables sont purements continues, LocalSolver utilise un algorithme de points intérieurs pour trouver des solutions localement optimales. Cet algorithme ne fait pas d'hypothèses sur les fonctions f et g_i, qui peuvent être non linéaires ou non convexes. Cette généricité se paye par une résolution moins efficace de certains problèmes, par exemple lorsque les fonctions f et g_i sont linéaires, quadratiques ou convexes. Afin d'améliorer les performances de LocalSolver dans ces cas particulier, ce stage propose d'implémenter un algorithme de points intérieurs dédié à la résolution de problèmes convexes.

2 Algorithmes de points intérieurs

Un algorithme de points intérieurs consiste à résoudre approximativement une suite de problèmes paramétrés $\big(P_\mu\big)$, pour des valeurs décroissantes du paramètre μ. Les problèmes $\big(P_\mu\big)$ correspondent à des perturbations des conditions d'optimalité du problème initial :

$$\big(P_\mu\big) \begin{cases} 0 & = \nabla f(x) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x) \\ \mu & = \lambda_i s_i \\ 0 & = g_i(x) - s_i \end{cases}$$

Une itération de l'algorithme consiste à effectuer une itération de la méthode de Newton sur les équations définissant $\big(P_\mu\big)$, suivie de la mise à jour de μ. Dans un cadre non-convexe, une implémentation naïve peut ne pas converger vers une solution (localement) optimale, ou même ne pas aboutir sur une solution faisable. De nombreuses astuces doivent alors être mises en place afin de limiter ces effets (ajout d'une fonction de mérite, alternance entre deux méthodes de résolution, etc). De plus, la géométrie défavorable limite l'efficacité de l'itération de Newton effectuée à chaque étape.

Dans le cadre linéaire/quadratique convexe, la géométrie est au contraire plus clémente, et permet d'utiliser un algorithme de type prédicteur-correcteur. Pour chaque problème

(P_μ), un tel algorithme résout un système linéaire supplémentaire, dans le but de compenser les variations du second ordre (liés aux nonlinéarités présentes dans le problème) rencontrés lors de la première itération de Newton. Cette classe d'algorithme possède de meilleures performances, à la fois en vitesse et en robustesse.

3 Méthodologie

Ce stage propose d'implémenter un tel algorithme de points intérieurs prédicteur-correcteur afin d'améliorer les performances de LocalSolver lorsque le problème est linéaire ou quadratique convexe.

L'algorithme sera sélectionné par une étude de l'état de l'art, et sera implémenté à partir des briques mathématiques déjà présentes dans LocalSolver. Les performances de cet algorithme seront comparées à celles de l'algorithme existant et à des implémentations librement distribuées, sur un ensemble de problèmes tests issus de la littérature scientifique et de l'industrie, ainsi que sur des relaxations convexes de problèmes non convexes.

Un autre problème qui pourra être traité est celui de la détection de la convexité d'un problème d'optimisation à partir du graphe de calcul de l'objectif et des contraintes.